

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika Instituut

Sulev Tõkke

**KOSMOLOOGILISTE MUDELITE UURIMINE DÜNAAMILISTE
SÜSTEEMIDE MEETODITEGA**

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendaja:
Laur Järv

Tartu 2018

Kosmoloogiliste mudelite uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega

Käesolevas bakalaureusetöös koostatakse skalaar-tensorteooriate põhjal kosmoloogiline mudel ja dünaamiliste süsteemide meetoditega uuritakse selle mudeli omadusi. Töö teoreetilises osas antakse ülevaade kaasaegsest kosmoloogiast üldrelatiivsusteooria raames ja tuuakse ära selle peamised probleemid, seejärel tehakse sissejuhatus skalaar-tensorteooriatesse. Lisaks tuuakse ära dünaamiliste süsteemide teoriaga seotud tähtsamad mõisted. Töö arvutuslikus osas uuritakse kõigepealt dünaamiliste süsteemide meetoditega Λ CDM-mudeli käitumist ja seejärel koostatakse kosmoloogiline mudel skalaar-tensorteooriate raames. Esitatakse selle mudeli kosmoloogilised võrrandid, konstrueeritakse nende põhjal dünaamiline süsteem ja selle kaudu analüüsitakse antud mudeli käitumist. Analüüsi tulemusena selgub, et uuritav mudel kirjeldab universumi arenguetappe kvalitatiivselt õigesti, aga tegemist ei ole siiski täielikult rahuldava kosmoloogilise modeliga.

Märksõnad: kosmoloogia, tumeenergia, dünaamilised süsteemid, skalaar-tensorteooriad.

CERCS: 190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika.

Studying Cosmological Models with the Methods of Dynamical Systems

In the following thesis a cosmological model is constructed on the basis of scalar-tensor theories and the properties of the model are studied with the methods of dynamical systems. In the theoretical part of the work we give an overview of modern cosmology in the context of general relativity and present the most important problems associated with it, after that we make an introduction into scalar-tensor theories. In addition we explain the most relevant concepts of dynamical systems. In the computational part of the work we study first the Λ CDM-model of general relativity with the methods of dynamical systems and after that we construct a cosmological model from the scalar-tensor theories. We present the cosmological equations of the model, construct a dynamical system from them and use that system to analyze the behavior of the model. We shall see that our model gives a correct qualitative description of the evolution of the Universe, but it is not a completely satisfying cosmological model.

Keywords: cosmology, dark energy, dynamical systems, scalar-tensor theories.

CERCS: 190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Kosmoloogia	5
1.1 Friedmanni - Lemaitre' - Robertsoni - Walkeri universum	5
1.2 Kosmoloogiline konstant	9
1.3 Skalaar-tensorteooriad	11
2 Dünaamilised süsteemid	13
2.1 Üldised mõisted	13
2.2 Lineaarse stabiilsuse teooria	15
3 ΛCDM-mudeli uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega	16
4 Skalaar-tensorteooria mudeli uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega	20
4.1 Kosmoloogilise mudeli üles seadmine	21
4.2 Vabade funktsioonidega mudeli uurimine	22
4.3 Fikseeritud funktsioonidega mudeli uurimine	28
4.4 Arutelu	32
Kokkuvõte	34
Tänuavaldused	35
Kirjandus	36
Lihtlitsents	38

Sissejuhatus

Kosmoloogia on teadus, mis uurib universumit tervikuna, ja kosmoloogia eesmärgiks on mõista universumi teket ja arengut. Meie universumis on makroskoopiliste objektide vahel domineerivaks vastastikmõjaks gravitatsioon, seega me peame universumi omadusi uurima Einsteini poolt formuleeritud **üldrelatiivsusteooria** kaudu. Üldrelatiivsusteooria on suurepärase saavutus, mis muutis pöördeliselt inimkonna ettekujutust universumist, ja seda peetakse üheks kaasaegse füüsika alustalaks. Siiski ei suuda üldrelatiivsusteooria pakkuda seletusi kõikidele tänapäevasetele kosmoloogilistele vaatlustele. See on pannud otsima üldrelatiivsusteooriale täiustusi ja alternatiive, nendest kõige tuntumad on **skalaar-tensorteooriad** [1][2].

Väga tõhus vahend erinevate kosmoloogiliste teooriate kvalitatiivseks uurimiseks on **dünaamiliste süsteemide teooria** [3], sest selle abil on hea saada informatsiooni süsteemi paljude lahendite üldise käitumise kohta.

Käesolevas bakalaureusetöös koostame skalaar-tensorteooriate põhjal kosmoloogilise mudeli, kus kosmoloogilise konstandi asemel põhjustab universumi paisumist dünaamiline skalaarväli. Dünaamiliste süsteemide meetoditega uurime antud mudeli omadusi ja võrdleme neid meie teadmistega selle kohta, millised omadused peaksid olema heal kosmoloogilisel mudelil. Hüpoteesiks on, et antud viisil skalaar-tensorteooriate põhjal koostatud kosmoloogilisel mudelil on olemas peamised omadused, mis on vajalikud, et antud mudel sobiks meie universumi kirjeldamiseks.

Esimeses peatükis anname ülevaate kaasaegsest kosmoloogiast üldrelatiivsusteooria raames ja toome ära selle peamised probleemid, ühtlasi teeme sissejuhatuse skalaar-tensorteooriatesse. Teises peatükis selgitame olulisemaid dünaamiliste süsteemidega seotud mõisteid ja kirjeldame peamist meetodit, millega kosmoloogias dünaamilisi süsteeme uuritakse, lineaarse stabiilsuse teooriat [2]. Kolmandas peatükis uurime dünaamiliste süsteemide meetoditega Λ CDM-mudelit, selle peatüki peamiseks eesmärgiks on tutvustada dünaamiliste süsteemide kosmoloogias rakendamise viise ja kasulikkust. Neljandas peatükis koostame kosmoloogilise mudeli skalaar-tensorteooriate põhjal ja uurime selle omadusi.

Kõik arvutused on tehtud Jupyter Notebooki programmeerimiskeskkonnas.

Peatükk 1

Kosmoloogia

1.1 Friedmanni - Lemaitre' - Robertsoni - Walkeri universum

Käesolev alapeatükk põhineb allikal [2], kui pole viidatud teisiti. Siin ja edaspidi on valemite enamasti võetud, et $c = 1$.

Kaasaegne kosmoloogia põhineb **kosmoloogilisel printsiibil**, mis ütleb, et piisavalt suurte mastaapide korral ($\sim 10^8$ valgusaastat) on universum homogeenne ja isotroopne. **Homogeensus** tähendab seda, et kõik ruumi punktid on samaväärsed, ja **isotroopsus** tähendab seda, et igas ruumi punktis näib ümbritsev ruum ühesugune kõikides suundades. Lihtsustatult võib homogeensusust mõelda kui invariantisusest kulgliikumiste korral ja isotroopsusest kui invariantisusest pöörete korral. Kosmoloogilist printsiipi on kinnitanud paljud vaatlused, nendest kõige täksamad on kosmilise taustkiirguse uuringud. Täpsustades on universum isotroopne ja homogeenne ruumis, aga mitte aegruumis [4].

Kosmoloogilisest printsiibist järeldub, et universumit kirjeldav aegruum peab oma ruumilises osas olema tugevalt sümmeetriline, konstantse aja hüperpinnad on konstanse kõverusega ruumid. Kõige üldisem neljamõõtmeline meetrika, mis oma ruumilises osas on maksimaalselt sümmeetriline, on **Friedmanni - Lemaitre' - Robertsoni - Walkeri (FLRW) meetrika** $g_{\mu\nu}$. Pseudo-sfäärilistes koordinaatides $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, mille keskpunkt asub suvalises universumi punktis, omab FLRW meetrika joonelement kuju

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1.1)$$

kus $k = 0, \pm 1$ on ruumi kõverus ja $a(t) > 0$ on ajast sõltuv funktsioon, mida nimetatakse

mastaabikordajaks. Kui kõverus $k = 1$, siis öeldakse, et universum on sfäärilise ruumi geomeetriaga, kui $k = -1$, siis öeldakse, et universum on hüperboolse ruumi geomeetriaga, ning kui $k = 0$, siis on universumi geomeetria tasane, kõverus puudub. Koordinaadid (r, θ, ϕ) on kaasaliikuvad koordinaadid, selles koordinaatsüsteemis asuv paigalolev vaatleja jääb paigale ehk selle vaatleja koordinaadid jäävad muutumatuks kõikidel ajahetkedel t .

Meetrilise tensori $g_{\mu\nu}$ dünaamikat kirjeldavad **Einsteini väljavõrrandid**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

kus $R_{\mu\nu}$ on Ricci tensor, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ on Ricci skalaar, mis iseloomustab kõverust, $T_{\mu\nu}$ on materia energia-impulsi tensor ja $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$ on seostuse kordaja, mis määrab gravitatsiooni tugevuse. Selles G on Newtoni gravitatsioonikonstant ja c on valguse kiirus [5]. Kosmoloogilisele printsiibile alluvas universumis saab materiat kirjeldada **ideaalse voolisena**, mis tähendab, et materia energia-impulsi tensor on täielikult määratud energiatiheduse $\rho(t)$ ja rõhu $p(t)$ kaudu:

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu. \quad (1.3)$$

Siin vektor u_μ tähistab ideaalse voolisega kaasaliikuva vaatleja neli-kiirust, mis kaasaliikuvates koordinaatides on kujul $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$. Ideaalse voolise energiatihedus ja rõhk on seotud **olekuvõrrandiga** $p = p(\rho)$, mis kosmoloogias oluliste ideaalsete vooliste korral on enamasti kujul [4]

$$p = w\rho, \quad (1.4)$$

kus w on olekuvõrrandi parameeter, mis ei sõltu ajast [4]. Lisaks energiatihedusele kasutatakse ka suhtelist energiatihedust

$$\Omega = \frac{\kappa^2 \rho}{3H^2}. \quad (1.5)$$

FLRW meetrika (1.1) korral Einsteini väljavõrranditest (1.2) tulenevad **kosmoloogilised võrrandid** koosnevad kahest diferentsiaalvõrrandist muutujate $a(t)$, $\rho(t)$ ja $p(t)$ jaoks. Einsteini väljavõrrandite ajalisest komponendist saame **Friedmanni võrrandi**:

$$\frac{k}{a^2} + H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho, \quad (1.6)$$

kus **Hubble'i parameeter** H on defineeritud kui

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (1.7)$$

kus täpp näitab tuletist aja järgi. Hubble'i parameeter iseloomustab universumi paisumise kiirust ja selle väärtust praegusel ajahetkel nimetatakse Hubble'i konstandiks H_0 , milleks on saadud $H_0 = 67,8 \pm 0,9 \text{ km/s/Mpc}$ [6].

Einsteini väljavõrrandite ruumilisest osast saame **kiirenduse võrrandi**:

$$\frac{k}{a^2} + 2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p. \quad (1.8)$$

Kui materia energiatihedust ja rõhku siduv olekuvõrrand on valitud, siis kosmoloogilised võrrandid (1.6) ja (1.8) määravad mastaabikordaja $a(t)$ arenemise ajas .

Kasutades Friedmanni võrrandit (1.6) saame kiirenduse võrrandi (1.8) kirjutada ümber kujul

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p), \quad (1.9)$$

mida vahel nimetatakse Raychaudhuri võrrandiks või ka teiseks Friedmanni võrrandiks [4]. Antud võrrandist saame tingimused materia muutujatele, mis määravad, kas universum paisub kiirenevalt ehk $\ddot{a} > 0$ või aeglustuvalt ehk $\ddot{a} < 0$. Näeme, et kui $\rho + 3p > 0$, siis universum paisub aeglustuvalt, kui $\rho + 3p < 0$, siis universum paisub kiirenevalt. Kui olekuvõrrand (1.4) kehtib, siis järelikult on universumi paisumine aeglustuv, kui olekuvõrrandi parameeter $w > -1/3$, ja kiirenev, kui olekuvõrrandi parameeter $w < -1/3$.

Energia-impulsi tensori jäävusest $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ on võimalik tuletada **energia jäävuse võrrand** materia ideaalse voolise jaoks:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.10)$$

See väljendab energia jäävust universumi arengu jooksul. Kui asendada energia jäävuse võrrandisse sisse olekuvõrrand (1.4) ja integreerida, siis tulemuseks on lahend energiatihedusele $\rho(a)$:

$$\rho \propto a^{-3(w+1)}, \quad (1.11)$$

mis kehtib alati, kui $w \neq -1$. Tasases universumis ($k = 0$) on võimalik leida väga lihtsad lahendid mastaabikordaja ajalise arengu jaoks, kui asendada võrrand (1.11) võrrandisse (1.6).

Selle tulemusena saadakse, et

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(w+1)}}. \quad (1.12)$$

Näeme, et mastaabikordaja sõltub ajast astmefunktsioonina, konkreetselt $a(t) \propto t^{2/3}$ tolmu domineerimise korral ja $a(t) \propto t^{1/2}$ kiirguse domineerimise korral. Need mõisted on selgitatud järgmises lõigus.

Kosmoloogias uuritakse tavaliselt kolme ideaalset voolist: tolm, kiirgus ja tumeenergia ehk vaakumi energia. **Tolmuks** peetakse kõiki omavahel mittepõrkuvaid mitterelativistilikke osakesi, mille rõhk on võrdne nulliga: $p_m = 0$ [4] ehk $w = w_m = 0$. Seega tolmu energiatihedus sõltub mastaabikordajast pöördkuupjalt: $\rho_m \propto a^{-3}$, mida võib tõlgendada osakeste arvtiheduse vähenemisena universumi paisudes. Tolmuks võib lugeda näiteks tavalisi tähti ja galaktikaid, mille rõhk on tühine võrreldes energiatihedusega. Universumit, milles suurim panus energiatihedusse tuleb tolmult, nimetatakse **tolmu-domineeritud** universumiks [4] ja sellise universumi paisumine on aeglustuv. **Kiirguseks** võib lugeda nii elektromagnetkiirgust kui ka massiivseid osakesi, mis liiguvad suhteliste kiirustega, mis on piisavalt lähedased valguse kiirusele, nii et need osakesed muutuvad footonitest eristamatuteks. Universumit, milles suurim panus energiatihedusse tuleb kiirgusest, nimetatakse **kiirguse-domineeritud** universumiks [4] ja sellise universumi paisumine on samuti aeglustuv. Kiirguse olekuvõrrandiks on $p_r = \rho_r/3$ [4] ehk $w = w_r = 1/3$, järelikult kiirguse energiatihedus sõltub mastaabikordajast kujul $\rho_r \propto a^{-4}$. Seega kiirguse energiatihedus väheneb universumi paisudes kiiremini kui tolmu energiatihedus, selle põhjuseks on footonite energiakadu punanihke korral. Analoogselt kaotavad massiivsed relativistlikud osakesed energiat, kui nende kiirus kaasaliikuvates koordinaatides väheneb. **Tumeenergia** olekuvõrrand on lihtsa kosmoloogilise konstandiga mudeli korral kujul $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ [4] ehk $w = w_\Lambda = -1$. Tumeenergia energiatihedus on konstantne, $\rho_\Lambda \propto a^0$. Kuna tolmu ja kiirguse energiatihedused universumi paisudes vähenevad, siis vaakumi energia muutub universumi paisudes pika aja peale domineerivaks. Universumit, milles suurim panus energiatihedusse tuleb vaakumi energialt, nimetatakse **vaakumi-domineeritud** universumiks [4] ja selline universum paisub kiirenevalt. Märkime veel ära, et tasases universumis peab igal ajahetkel suhteliste energiatiheduste jaoks kehtima seos $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$.

Praegusel ajal universumi paisumine kiireneb, universum liigub tolmu-domineeritud ajajärgust vaakumi-domineeritud ajajärku. See tähendab, et minevikus pidi universum olema väiksem ja tihedam ning seega kiirguse-domineeritud. Minnes ajas veel kaugemale tagasi oli universum väga tihe, tuline ja praegusega võrreldes kokku surutud. Universumi algust nimetatakse tihti **Suureks Pauguks** ja paistab väga tõenäoline, et varane universum läbis samuti kiireneva paisumise perioodi, mida nimetatakse **inflatsiooniks** [5]. Järgmises alapeatükis räägime lähemalt sellest, mis põhjustab universumi paisumist.

1.2 Kosmoloogiline konstant

Käesolev alapeatükk põhineb samuti allikal [2], kui pole viidatud teisiti.

Me teame, et meie universum on umbes 13,8 miljardit aastat vana [6], kiireneva paisumise ajajärgus ning universum näib olevat kooskõlas kosmoloogilise printsiibiga. Kuna tolmu ja kiirguse domineeriv mõju universumi energiatihedusse põhjustaks aeglustuvat paisumist, toodi vaatlusandmete selgitamiseks sisse **tumeenergia** mõiste. Tumeenergia on defineeritud kui materia komponent, mille olekuvõrrandit iseloomustab negatiivne rõhk: $p_{de} < -\rho_{de}/3$ ehk $w_{de} < -1/3$. Lihtsaim tumeenergia mudel on **kosmoloogiline konstant** Λ , mille olekuvõrrand on eespool toodud $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$ ehk $w_{\Lambda} = -1$. Kosmoloogiline konstant esineb lihtsa täiendusena Einsteini väljavõrranditele ning selle võttis esimesena kasutusele Einstein ise aastal 1917, et koostada staatilise universumi mudelit. Peale universumi paisumise avastamist eirati kosmoloogilist konstanti pikalt, kuni 1980ndate lõpus ja 1990ndate alguses tehti vaatlused, mis olid vastuolus täielikult materia-dominantse universumi mudeliga. Kosmoloogiline konstant muutus kosmoloogias äärmiselt oluliseks aga aastal 1998, kui leiti, et universumi paisumine kiireneb ja seega universumis peab domineerima mingisugune energiatihedus, mis sarnaneb kosmoloogilise konstandiga. Sellest ajast on keske tähtsusega küsimus, miks universum paisub, ehk samaväärselt, mis on tumeenergia fundamentaalne olemus?

Kosmoloogilisele konstandile vastav suhteline energiatihedus praegusel ajal on $\Omega_{\Lambda 0} = 0,692 \pm 0,012$ [6], seega tumeenergia moodustab universumi energiast ligikaudu 70%. Tumeenergia olekuvõrrandi parameetri vaatluslikuks väärtuseks on saadud $w_{\Lambda} = -1,006 \pm 0,045$ [6], mis on kooskõlas kosmoloogilise konstandi mudeliga. Ülejäänud osas universumi energiatihedusest domineerib mitterelativistlik osa materiast ehk tolmu, mille suhteliseks energiatiheduseks on saadud $\Omega_{m0} = 0,308 \pm 0,012$ [6]. Tolm jaguneb tavaliseks aineks ja tumeaineks, mida on vaja, et selgitada vaatlusandmeid galaktikate pöörlemise ja galaktikaparvede dünaamika kohta. Kiirguse energiatiheduseks on saadud $\Omega_{r0} = 10^{-4}$ [4].

Uurime nüüd kosmoloogia võrrandeid, kuhu on lisatud kosmoloogiline konstant. Koos kosmoloogilise konstandiga omandavad Einsteini väljavõrrandid (1.2) kuju

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (1.13)$$

kus $\Lambda = 8\pi G\rho_{\Lambda}$ on kosmoloogiline konstant [7]. Kosmoloogiliste vaatlustega kokku sobimiseks peaks kosmoloogilise konstandi väärtus olema positiivne ja suurusjärgus $\Lambda \simeq 10^{-52}\text{m}^{-2}$, mis on liiga väike, et põhjustada tuvastatavaid efekte Päikesesüsteemis. Koos kosmoloogilise

konstandiga omandavad Friedmanni võrrand (1.6) ja kiirenduse võrrand (1.8) üldisema kuju

$$3H^2 = \kappa^2 \rho + \Lambda, \quad (1.14)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p + \Lambda. \quad (1.15)$$

Kui nendes võrrandites kosmoloogiline konstant domineerib ja me saame võtta, et $\rho = 0$ ja $p = 0$, siis on kerge leida lahendit mastaabikordaja ajalise arengu jaoks:

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad \text{kus} \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (1.16)$$

Seda nimetatakse **de Sitteri lahendiks**. Taolises universumis on alati täidetud tingimus $\ddot{a} > 0$ ehk universumi paisumine on alati kiirenev. Mõistagi ei sobi selline lahend meie universumi kirjeldamiseks, aga seda on võimalik vaadata asümptootilise lahendina varases ja hilises universumis, mõlemal juhul küll väga erineva Λ väärtusega. Mudel, kus universum areneb piisavalt pika aja jooksul tolmu-dominantselt ja peale seda liigub de Sitteri paisumisse, võiks olla sobiv kirjeldus kosmoloogilistes vaatlustes nähtule. Sellel põhjusel uurime ka lahendit mastaabikordaja jaoks, kui kosmoloogiline konstant ei domineeri ja ülejäänud osa materiasist järgib lineaarset olekuvõrrandit, $p = w\rho$ ja $\rho > 0$. Seda on võimalik leida, kui kõrvaldada ρ võrrandites (1.14)-(1.15), seejärel leida saadud diferentsiaalvõrrandist lahend H jaoks kujul $H(t)$ ja viimaseks lahendada diferentsiaalvõrrand $H = \dot{a}/a$. Mastaabikordaja füüsikaliseks lahendiks tuleb

$$a(t) \propto [\sinh(Ct)]^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad (1.17)$$

kus C on konstant. Varastel ehk kiirguse- või tolmu-dominantsetel aegadel ja hilistel ehk vaakumi-dominantsetel aegadel on sellel lahendil õige asümptootiline käitumine:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(w+1)}} \quad \text{kui} \quad t \rightarrow 0, \quad (1.18)$$

$$a(t) \propto e^{\frac{2Ct}{3(w+1)}}, \quad \text{kui} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (1.19)$$

Esimene lahend vastab ideaalse voolise lahendile (1.12) ja teine lahend vastab kosmoloogilise konstandi lahendile (1.16), kus $H = 2C/[3(w+1)]$.

Selles mudelis ei kajastu küll üleminek kiirguse-domineeritud ajajärgust tolmu-domineeritud ajajärku varases universumis, aga lahend (1.17) kirjeldab edukalt meie vaadeldud universumit, mille paisumine oli aeglustuv varastel aegadel ja on kiirenev hilistel aegadel. Seega on mingi ideaalse voolisega ja kosmoloogilise konstandiga täidetud universumi mudelil samad üldised omadused nagu meie vaadeldud universumil. Kosmoloogilise konstandiga universumi mudelit,

mis sisaldab nii kiirgust kui ka tolmu, on võimalik uurida dünaamiliste süsteemide meetoditega.

Kirjeldatud universumi mudelit kosmoloogilise konstandi ja mitterelativistliku tumeainega nimetatakse **Λ CDM-mudeliks**.

Kosmoloogilise konstandi äärmiselt väike vaatluste teel saadud väärtus on vastuolus teoreetiliste ennustustega ning ühtlasi toob kosmoloogiline konstant endaga kaasa ka mitmeid teoreetilisi ja filosoofilisi probleeme ja seda nii klassikalisel kui ka kvanttasemel. Need probleemid tekivad, kuna kosmoloogilist konstanti on võimalik samastada kvantväljade vaakumienergiaga. Osakestefüüsika mudelite järgi peaks vaakumi energia olema määratud taandatud Plancki massiga $M_p = (8\pi G)^{-1/2} \sim 10^{18} \text{ GeV}$. Vaakumi energia oleks siis suurusjärgus $\rho_{\text{vaakum}} \sim M_p^4 \sim (10^{18} \text{ GeV})^4$ [8]. Kosmoloogiliste vaatluste põhjal teame, et $|\rho_{\Lambda}^{\text{vaatluslik}}| \leq (10^{-12} \text{ GeV})^4$. Teoreetiliselt arvatud vaakumi energiatihedus on seega vaatluslikult saadud väärtusest 120 suurusjärku suurem [4]. Kosmoloogilise konstandi teoreetilist väärtust on võimalik vähendada supersümmeetriliste teooriate abil, aga ka sellisel juhul on see ikka 60 suurusjärku võrra suurem vaatluslikust väärtusest [8]. Seda suurt vastuolu nimetatakse **kosmoloogilise konstandi probleemiks** [4].

Jättes kõrvale kõik eelnevad teoreetilised selgitused kosmoloogilise konstandi kohta, on selge see, et kosmoloogilise konstandi väärtus peab olema äärmiselt väike, et võimaldada universumil viibida piisavalt kaua tolmu-domineeritud ajajärgus. Kui kosmoloogilise konstandi väärtus oleks natuke suurem, oleks varane universum liikunud kiirguse-domineeritud ajajärgust otse vaakumi-domineeritud ajajärku ning tähti, galaktikaid ja muid kosmilisi struktuure poleks üldse tekkinud. Lisaks sellele on inimkond arenenud välja täpselt sellel ajal, kui universum liigub tolmu-domineeritud ajajärgust vaakumi-domineeritud ajajärku. See paneb küsima, et kuidas on võimalik, et inimkond vaatlleb universumit just siis, kui tolmu ja tumeenergia suhtelised energiatihedused on samas suurusjärgus, $\Omega_m \sim \Omega_{\Lambda}$? Kui universumi lõppolek on vaakumi-domineeritud, peaks inimeste teke vaakumi-domineeritud ajajärgul olema palju tõenäolisem kui tolmu-domineeritud ajajärgul, veel vähem üleminekuperioodi ajal. Seda üsna filosoofilist probleemi tuntakse **kosmilise kokkusattumuse probleemina** [8].

1.3 Skalaar-tensorteooriad

Tumeenergia mõistatuslik olemus on andnud põhjuse üksikasjalikult uurida võimalikke laiendusi üldrelatiivsusteooriale ja sellel põhinevale Λ CDM-mudelile. Vaatlustega küllaltki hästi kokku sobivaid alternatiivseid teooriad on välja töötatud palju [1], nendest kõige laiemalt levinud on gravitatsiooni skalaar-tensorteooriad [9]. Need rakendavad gravitatsioonilise vastastikmõju kirjeldamiseks lisaks tavalisele aegruumi meetrilisele tensorile $g_{\mu\nu}$ ka

skalaarvälja ϕ [10]. Selle välja peamiseks otstarbeks on muutuva gravitatsioonikonstandi lokaalsete väärtuste väljendamine [11]. Skalaar-tensorteooriad on saanud üldrelatiivsusteooria laienduste konstrueerimise tüüpiliseks näiteks ning nad pakuvad erilist huvi selle tõttu, et nende väljavõrrandite suhteliselt lihtne struktuur võimaldab paljudel füüsikaliselt huvitavatel juhtudel leida täpseid analüütilisi lahendeid [1]. Lisaks ennustavad mitmed kõrgemadimensionaalsed teooriad, näiteks stringiteooria, skalaar-tensorväljateooriate kehtivust neljamõõtmelises ruumis [1][4].

Skalaar-tensorteooriate üldise mõjufunktsionaali saame kirjutada kujul [12]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \mathcal{A}(\phi) R - \frac{1}{2} \mathcal{B}(\phi) (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right] + S_m \left[e^{2\alpha(\phi)} g_{\mu\nu}, \psi_m \right]. \quad (1.20)$$

Siin kasutame raamatu [13] märgisüsteemi ning R on Ricci skalaar ja $\kappa^2 = 8\pi G$. Selle mõjufunktsionaali esimene liige sõltub meetrikast $g_{\mu\nu}$ ja skalaarväljast ϕ ning teine liige S_m on funktsionaal mateeriaväljadest ψ_m ja meetrikast $\hat{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha(\phi)} g_{\mu\nu}$ [12]. Antud mõjufunktsionaal sisaldab veel nelja skalaarväljast ϕ sõltuvat vabalt valitavat dimensioonitut funktsiooni: kõveruse seose funktsioon $\mathcal{A}(\phi)$, skalaarvälja üldine kineetiline seos $\mathcal{B}(\phi)$, skalaarvälja eneseinteraktsiooni potentsiaal $V(\phi)$ ja konformne seos $\alpha(\phi)$ meetrika $g_{\mu\nu}$ ja mateeriaväljade ψ_m vahel. Nende funktsioonide fikseerimine määrab konkreetse teooria. Kui eeldada, et gravitatsiooniline vastastikmõju on alati lõplik ja tõmbav, peab kõveruse seose funktsioon rahuldama tingimust $0 < \mathcal{A}(\phi) < \infty$. Füüsikalistel kaalutlustel võib eeldada ka seda, et eneseinteraktsiooni potentsiaal on positiivne, $0 \leq V(\phi) < \infty$ [14].

Kaks kõige tuntumat funktsioonide $\mathcal{A}(\phi)$, $\mathcal{B}(\phi)$, $V(\phi)$ ja $\alpha(\phi)$ valikut ehk **konformset raami** on [12]:

- **Jordani raam**, mida iseloomustab valik $\alpha = 0$ ja $\mathcal{B} = 1$. Funktsioonid $\mathcal{A}(\phi)$ ja $V(\phi)$ jäävad vabaks [12]. Jordani raamis puudub otsene vastastikmõju skalaarvälja ja mateeriaväljade vahel [1] ja vabalt langevad osakesed järgivad nendega seotud meetrika geodeetilisi jooni [12].
- **Einsteini raam**, mida iseloomustab valik $\mathcal{A} = 1$ ja $\mathcal{B} = 1$. Vabad funktsioonid Einsteini raamis on $V(\phi)$ ja $\alpha(\phi)$ [12]. Einsteini raamis võtavad väljavõrrandid samasuguse kuju nagu gravitatsiooniga minimaalselt seotud kanoonilise skalaarvälja korral, aga vabalt langevad osakesed järgiksid ikka Jordani raami geodeetilisi jooni, mis enamasti ei lange kokku Einsteini raami geodeetiliste joontega [4].

Skalaar-tensorteooriate kosmoloogilised võrrandid Jordani raamis esitame neljandas peatükis.

Peatükk 2

Dünaamilised süsteemid

Dünaamilisteks süsteemideks nimetatakse matemaatilisi süsteeme, mille olek muutub ajas [15]. Dünaamiliste süsteemidega on võimalik matemaatiliselt modelleerida kõikvõimalikke füüsikalisi süsteeme, alates lihtsatest pendlitest ja lõpetades kogu universumiga [2]. Dünaamilise süsteemi olek mingil ajahetkel sõltub süsteemi eelnevatest olekutest, seega dünaamiliste süsteemide ajaliseks arenguks piisab algoleku määramisest, peale mida süsteemid arenevad oma sisemise dünaamika kohaselt [16].

2.1 Üldised mõisted

Kõik dünaamilised süsteemid koosnevad olekute ruumist ja matemaatilisest eeskirjast, mis kirjeldab süsteemi arengut selles ruumis. Uuritava süsteemi iseloomustamiseks vajame muutujaid, mis kirjeldavad süsteemi olekut, ja dünaamilise süsteemi **olekute ruumiks** või ka **faasiruumiks** nimetatakse selliste muutujate kõikide võimalike väärtuste hulka [2]. Näiteks füüsikalise pendli korral on selle nurkkiirus ja kõrvalekaldenurk vertikaalist loomulikud suurused, millega kogu süsteemi olekut kirjeldada, aga keerulisemate süsteemide nagu näiteks kogu universumi kirjeldamiseks sobivate suuruste valimine ei ole sugugi triviaalne. Ühe dünaamilise süsteemi uurimiseks on võimalik valida erinevaid muutujaid ja iga valik võib olla sobiv mingi kindla küsimuse lahendamiseks [5].

Dünaamilised süsteemid võivad olla nii diskreetse kui ka pideva. **Diskreetsete dünaamiliste süsteemide** ajaparameter on diskreetne, $t \in \mathbb{N}$ või $t \in \mathbb{Z}$, ja süsteemi areng on määratud itereeruvate funktsioonidega. **Pidevate dünaamiliste süsteemide** ajaparameter on pidev, $t \in \mathbb{R}$ [15], ja süsteemi areng on määratud harilike diferentsiaalvõrranditega. Kosmoloogias vaadatakse Einsteini väljavõrrandeid, mis homogeense ja isotroopse ruumi jaoks annavad

meile harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi, seega kosmoloogias on tähtis just pidevate dünaamiliste süsteemide uurimine [5]. Pidevad dünaamilised süsteemid jagunevad omakorda **autonoomseteks** süsteemideks, mis ei sõltu ajast ilmutatud kujul, ja **mitteautonoomseteks** süsteemideks, mis sõltuvad ajast ilmutatud kujul [17].

Vaatame lähemalt pidevaid autonoomseid dünaamilisi süsteeme. Olgu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ element olekute ruumis $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Siis saame üldise dünaamilise süsteemi kirjutada kujul [2]

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.1)$$

kus funktsioon f kujutab punkti olekute ruumist olekute ruumi, $f : X \rightarrow X$, ja kus täpp näitab tuletist mingi sobiva ajaparametri $t \in \mathbb{R}$ järgi. Funktsiooni f saame käsitleda vektorväljana ruumis \mathbb{R}^n , mis tähendab, et [2]

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)). \quad (2.2)$$

Seega on meil n dünaamilist võrrandit, mis kirjeldavad n muutuja käitumist. Eeldame, et meil on tegemist lõplikumõõtmelise süsteemiga, mis on diferentseeruv olekute ruumis X . Kosmoloogias esinevad dünaamilised süsteemid sisaldavad enamasti ainult elementaarfunktsioone ja on peaaegu kõikjal siledad, ainult kõige keerulisematel juhtudel võib esineda mõningaid singulaarsusi. Valides mingi punkti $x \in X$ mingil kindlal ajahetkel t , saame leida süsteemi (2.2) lahendi $\psi(t)$, mida nimetatakse süsteemi **trajektoori**ks või **orbiidiks** olekute ruumis \mathbb{R}^n . Dünaamilise süsteemi $\dot{x} = f(x)$ **püsipunktiks** nimetatakse punkti $x = x_0$, kus $f(x_0) = 0$. Püsipunktis oleva süsteemi olek ei muutu. Kuigi põhimõttelist võib dünaamiline süsteem püsipunktis viibida lõpmatult kaua, on dünaamiliste süsteemide uurimisel oluline välja selgitada, kas uuritav süsteem saab üldse vastavasse olekusse jõuda ja kas see olek on stabiilne väikeste häirituste suhtes. Süsteemi (2.1) püsipunkti x_0 nimetatakse **stabiilseks püsipunktiks**, kui selle püsipunkti lähedusest algavad trajektooriid jäävad selle püsipunkti lähedale. Süsteemi (2.1) püsipunkti x_0 nimetatakse **asümptootiliselt stabiilseks püsipunktiks**, kui see püsipunkt on stabiilne ja kõik lähedalt algavad trajektooriid suubuvad antud püsipunkti. Süsteemi (2.1) püsipunkti x_0 nimetatakse **ebastabiilseks püsipunktiks**, kui kõik selle püsipunkti lähedalt algavad trajektooriid suunduvad sellest eemale. Kahte püsipunkti ühendavat trajektoori nimetatakse **heterokliinseks orbiidiks** [2].

Stabiilset püsipunkti ja asümptootiliselt stabiilset püsipunkti eristab see, et stabiilse püsipunkti korral võivad trajektooriid jääda antud püsipunkti ümber tiirlema, aga kõik asümptootiliselt stabiilse püsipunkti juurest algavad trajektooriid jõuavad lõpuks antud püsipunkti. Kosmoloogias on peaaegu kõik stabiilsed püsipunktid ka asümptootiliselt stabiilsed, seega enamasti pole vaja stabiilse püsipunkti tüüpi eraldi täpsustada [2].

2.2 Lineaarse stabiilsuse teooria

Kõige levinum meetod dünaamiliste süsteemide käitumise uurimiseks on **lineaarse stabiilsuse teooria**, mis on suurema osa kosmoloogiliste mudelite füüsikaliste omaduste väljaselgitamiseks piisav. Lineaarse stabiilsuse teooria keskne võte, mis võimaldab mingi püsipunkti ümbruses mõista kogu süsteemi dünaamikat, on süsteemi lineariseerimine antud püsipunkti ümbruses. Süsteemi käitumist määrav funktsioon f on kujul $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, kus kõiki funktsioone $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on võimalik arendada Tayloriga püsipunkti x_0 ümbruses. Rittaarenduse tulemuseks on [2]

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) y_j y_k + \dots, \quad (2.3)$$

kus vektor y on defineeritud kui $y = x - x_0$. Lineaarse stabiilsuse teoorias arvestatakse ainult esimest järku osatuletisi, seega kõige olulisem on objekt $\partial f_i / \partial x_j$ ja me saame defineerida dünaamilise süsteemi **Jacobi maatriksi** ehk **stabiilsuse maatriksi** [2]:

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Näeme, et dünaamilise süsteemi Jacobi maatriks on $n \times n$ maatriks, millel on n omaväärtust, mis võivad olla kompleksed. Jacobi maatriksi omaväärtused püsipunktis x_0 sisaldavad informatsiooni antud püsipunkti stabiilsuse kohta. Kui x_0 on süsteemi $\dot{x} = f(x)$ püsipunkt, siis x_0 -i nimetatakse **hüperboolseks püsipunktiks**, kui mitte ühegi Jacobi maatriksi omaväärtuse reaalosa ei võrdu nulliga. Vastasel korral nimetatakse punkti x_0 **mittehüperboolseks**. Mittehüperboolsete püsipunktide korral lineaarse stabiilsuse teooria ei tööta ja süsteemi stabiilsuse uurimiseks tuleb kasutada teisi meetodeid [2].

Kosmoloogiliste dünaamiliste süsteemide korral on oluline eristada kolme püsipunktide tüüpi. Kui kõik Jacobi maatriksi omaväärtuste reaalosad on negatiivsed, on tegemist stabiilse püsipunktiga, mis tõmbab enda poole kõiki lähedal asuvaid trajektoore. Taolist punkti nimetatakse **atraktoriks**. Kui kõik Jacobi maatriksi omaväärtuste reaalosad on positiivsed, on tegemist ebastabiilse püsipunktiga, mis tõukab kõiki lähedal asuvaid trajektoore endast eemale. Sellist punkti nimetatakse **repelleriks**. Kui vähemalt kahel Jacobi maatriksi omaväärtuste reaalosad on vastupidine märk, siis on tegemist punktiga, mis mõnes suunas tõmbab trajektoore lähemale ja teistes suundades tõukab eemale ning taolist punkti nimetatakse **sadulaks** [2].

Peatükk 3

Λ CDM-mudeli uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega

Rakendame dünaamiliste süsteemide meetodit, et uurida Λ CDM-mudeli universumi dünaamikat. Selleks kirjutame kõigepealt välja võrrandid (1.14) ja (1.15) kujul, kus on nii tolm ($p_m = 0$) kui ka kiirgus ($p_r = \rho_r/3$) [2]:

$$3H^2 = \kappa^2 \rho_r + \kappa^2 \rho_m + \Lambda, \quad (3.1)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{3} \rho_r + \Lambda. \quad (3.2)$$

Konstrueerime nende põhjal kahemõõtmelise dünaamilise süsteemi ja uurime selle käitumist. Selleks määrame kõigepealt, et $\kappa = 1$, ja kirjutame Friedmanni võrrandi (3.1) ümber dimensionaalsetele kujul:

$$1 = \frac{\rho_r}{3H^2} + \frac{\rho_m}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (3.3)$$

Selle põhjal võtame kasutusele uued muutujad

$$x = \frac{\rho_r}{3H^2}, \quad y = \frac{\rho_m}{3H^2}. \quad (3.4)$$

Uute muutujatega saame Friedmanni võrrandi kirjutada kujul

$$1 = x + y + \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (3.5)$$

Dünaamilise süsteemi konstrueerimiseks leiame uute muutujate tuletised:

$$\dot{x} = \frac{\dot{\rho}_r}{3H^2} - \frac{2\dot{H}}{3H^3}\rho_r, \quad \dot{y} = \frac{\dot{\rho}_m}{3H^2} - \frac{2\dot{H}}{3H^3}\rho_m. \quad (3.6)$$

Jäävusseadus (1.10) omandab tolmu energiatiheduse jaoks kuju $\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0$ ja kiirguse energiatiheduse jaoks kuju $\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0$. Vajalikul kujul dünaamilise süsteemi saamiseks avaldame

$$\rho_r = 3H^2x, \quad \dot{\rho}_r = -4H\rho_r = -12H^3x, \quad (3.7)$$

$$\rho_m = 3H^2y, \quad \dot{\rho}_m = -3H\rho_m = -9H^3y. \quad (3.8)$$

Kiirenduse võrrandist (3.2) saame

$$\frac{2\dot{H}}{3H^2} = \frac{\Lambda}{3H^2} - 1 - \frac{\rho_r}{9H^2} = 1 - x - y - 1 - \frac{x}{3} = -\frac{4}{3}x - y \quad (3.9)$$

Asendame saadud avaldised süsteemi (3.6):

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{12H^3x}{3H^2} + \left(\frac{4}{3}x + y\right) \cdot \frac{3H^2x}{H} = -4Hx + 4Hx^2 + 3Hxy, \\ \dot{y} = -\frac{9H^3y}{3H^2} + \left(\frac{4}{3}x - y\right) \cdot \frac{3H^2y}{H} = -3Hy + 4Hxy + 3Hy^2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Jagame veel saadud avaldised H -ga läbi ja olemegi kätte saanud vajalikul kujul dünaamilise süsteemi:

$$\begin{cases} x' = 4x^2 + 3xy - 4x \\ y' = 3y^2 + 4xy - 3y, \end{cases} \quad (3.11)$$

kus

$$() = \frac{1}{H} \frac{d}{dt}. \quad (3.12)$$

Järgmisena leiame süsteemi (3.11) püsipunktid ja Jacobi maatriksi omaväärtused püsipunktides. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x^2 + 3xy - 4x = 0 \\ 3y^2 + 4xy - 3y = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

lahendamisel saame, et süsteemi püsipunktid on $(1, 0)$, $(0, 1)$ ja $(0, 0)$. Kuna muutujatest x ja y võime mõelda kui kiirguse ja tolmu suhtelistest energiatihedustest, siis püsipunkt $(1, 0)$ vastab

kiirguse-domineeritud ajastule universumis, $(0, 1)$ vastab tolmu-domineeritud ajastule ja $(0, 0)$ vastab vaakumi-domineeritud ajastule.

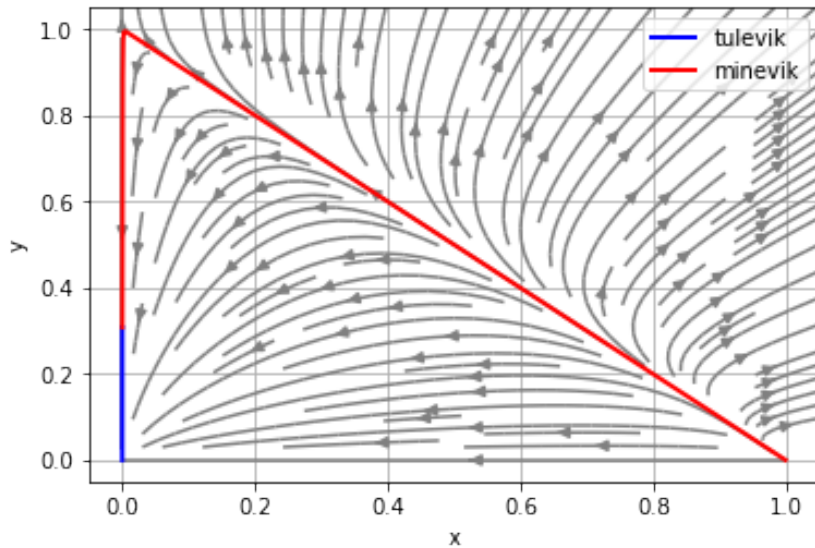
Meie süsteemi Jacobi maatriks on kujul

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial x'(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial y'(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial y'(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x + 3y - 4 & 3x \\ 4y & 4x + 6y - 3 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

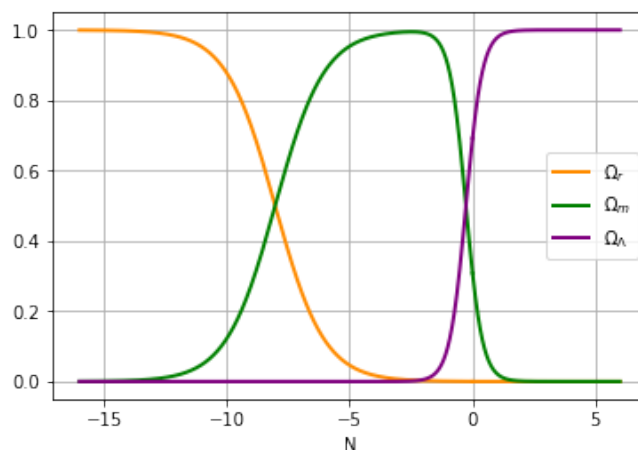
Jacobi maatriksi omaväärtused püsipunktides on

$$\begin{cases} \lambda_{r1} = 1 \\ \lambda_{r2} = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_{m1} = -1 \\ \lambda_{m2} = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} \lambda_{de1} = -4, \\ \lambda_{de2} = -3 \end{cases}. \quad (3.15)$$

Näeme, et kiirguse-domineeritud ajastule vastav püsipunkt on repeller, tolmu-domineeritud püsipunkt on sadul ja vaakumi-domineeritud püsipunkt on atraktor. Mudeli käitumise illustreerimiseks joonistame dünaamilise süsteemi (3.11) trajektoori faasiruumis, mille saame, kui algpunktiks valime praeguse hetke universumi energiatiheduste väärtused $x_0 = 10^{-4}$ ja $y_0 = 0,308$ ja integreerime ajas edasi ja tagasi. Lisaks arvestame, et $\Omega_\Lambda = 1 - x - y$ ning esitame graafikuna energiatiheduste sõltuvuse ajaparaameetrist $N = Hdt$, kus praegusele ajale vastab ajaparaameetri väärtus $N = 0$.



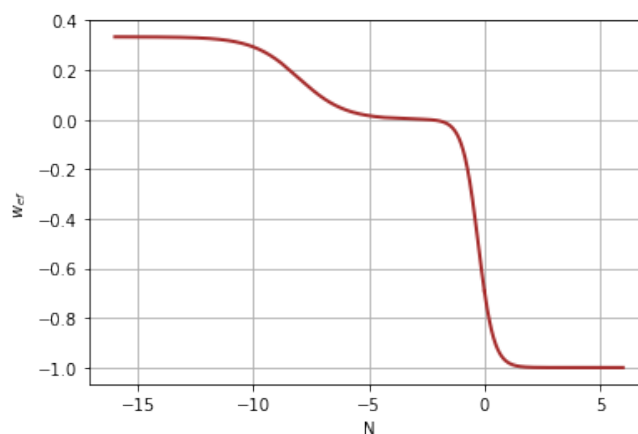
Joonis 3.1: Dünaamilise süsteemi (3.11) areng faasiruumis. Punast ja sinist värvi joon on üks näidistrajektoori, mis vastab meie universumile. Faasiportree ülemine parem kolmnurk vastab negatiivsele kosmoloogilisele konstandile ja meile huvi ei paku.



Joonis 3.2: Suhteliste energiatiheduste muutumine ajas.

Uurime veel ka efektiivset olekuparameetrit, mis on defineeritud kujul $w_{\text{ef}} = p_{\text{kogu}}/\rho_{\text{kogu}}$. Kui universum on kiirguse-domineeritud olekus, siis $w_{\text{ef}} = 1/3$, kui universum on tolmu-domineeritud olekus, siis $w_{\text{ef}} = 0$, ning kui universum on vaakumi-domineeritud olekus, siis $w_{\text{ef}} = -1$. Leiame efektiivse olekuparameetri avaldise käesoleva süsteemi jaoks ja esitame selle graafiku:

$$w_{\text{ef}} = \frac{p_{\text{kogu}}}{\rho_{\text{kogu}}} = \frac{p_r + p_m + p_\Lambda}{\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda} = \frac{3H^2 \left(\frac{x}{3} - \Omega_\Lambda\right)}{3H^2 (x + y + \Omega_\Lambda)} = \frac{\frac{x}{3} - 1 + x + y}{x + y + 1 - x - y} = \frac{4}{3}x + y - 1. \quad (3.16)$$



Joonis 3.3: Efektiivse olekuparameetri muutumine ajas.

Graafikutelt on selgelt näha, kuidas universum oli alguses kiirguse-domineeritud olekus, seejärel liikus tolmu-domineeritud olekusse ning praegu on suundumas vaakumi-domineeritud olekusse. Tõepoolest kirjeldab Λ CDM-mudel universumi üldiseid omadusi edukalt.

Peatükk 4

Skalaar-tensorteooria mudeli uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega

Algavas peatükis konstrueerime skalaar-tensorteooriate põhjal kosmoloogilise mudeli ja uurime selle käitumist, kasutades selleks dünaamiliste süsteemide meetodeid. Hea kosmoloogiline mudel peab tekitama universumi evolutsioonis neli ajajärku [5]:

inflatsioon \Rightarrow kiirguse-domineeritud ajastu \Rightarrow tolmu-domineeritud ajastu
 \Rightarrow vaakumi-domineeritud ajastu.

Siin nii inflatsioon kui ka vaakumi-domineeritud ajastu tähendavad skalaarvälja domineerimist universumis.

Mudeli konstrueerimist alustame skalaar-tensorteooriate üldisest mõjufunktsionaalist Jordani raamis. Sellest mõjufunktsionaalist on võimalik tuletada kosmoloogilised võrrandid, mille põhjal koostame dünaamilise süsteemi. Analüüsime dünaamilist süsteemi, et näha, kas eespool mainitud ajastud on käesolevas mudelis esindatud. Nende arvutuste käigus leiame ka tingimused, mida peavad rahuldama esialgu vabaks jäänud funktsioonid.

Lõpuks fikseerime meie kosmoloogilise mudeli, valides leitud tingimusi arvestades kindla kuju ka esialgu vabaks jäänud funktsioonidele. Seejärel joonistame süsteemi trajektoori faasiruumis ja konstrueerime graafikud suhteliste energiatiheduste ja efektiivse olekuparameetri jaoks. Nende abil saame võrrelda uuritava universumi mudeli omadusi meile nähtava universumi omadustega ja ka Λ CDM-mudeliga.

4.1 Kosmoloogilise mudeli üles seadmine

Uurime teooriat Jordani raamis, mille korral $\alpha(\phi) = 0$ ja $\mathcal{B}(\phi) = 1$. Vabadeks funktsioonideks on seega $\mathcal{A}(\phi)$ ja $V(\phi)$ [12]. Kõveruse seose funktsiooni lahutame konstantseks osaks, mis esindab puhast gravitatsioonikonstanti, ja skalaarväljast sõltuvaks osaks: $\mathcal{A} = 1 + f(\phi)$. Nende valikute tulemusena omandab mõjufunktsionaal (1.20) kuju

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} (1 + f(\phi)) R - \frac{1}{2} (\nabla(\phi))^2 - V(\phi) \right] + S_m [g_{\mu\nu}, \psi_m]. \quad (4.1)$$

Mõjufunktsionaali (4.1) varieerimisel meetrika ja skalaarvälja järgi on võimalik tuletada universumi käitumist kirjeldavad dünaamilised võrrandid. Selleks eeldame, et meil on tasane FLRW universum, mille meetrika joonelement on kujul [18]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2. \quad (4.2)$$

Lisaks eeldame, et universum sisaldab kiirgust ja tolmu, mida võime käsitleda ideaalsete voolistena, mille energiatihedused on vastavalt ρ_r ja ρ_m [18].

Mõju (4.1) varieerimisel meetrika suhtes on tulemuseks järgmised dünaamilised võrrandid [18]:

$$3(1 + f(\phi))H^2 = \rho_r + \rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - 3Hf_{,\phi}(\phi)\dot{\phi} + V(\phi), \quad (4.3)$$

$$-2(1 + f(\phi))\dot{H} = \frac{4}{3}\rho_r + \rho_m + \dot{\phi}^2 + f_{\phi\phi}(\phi)\dot{\phi}^2 + f_{\phi}(\phi)\ddot{\phi} - Hf_{\phi}(\phi)\dot{\phi}. \quad (4.4)$$

Oleme võtnud, et $\kappa = 1$. Neid võrrandeid võib nimetada üldistatud Friedmanni võrranditeks. Mõju (4.1) varieerimisel skalaarvälja ϕ suhtes on tulemuseks Klein-Gordoni võrrand [18]:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 3f_{\phi}(\phi) (\dot{H} + 2H^2) - V_{\phi}(\phi). \quad (4.5)$$

Kiirguse energiatiheduse ρ_r ja tolmu energiatiheduse ρ_m jaoks kehtivad jäävusseadused [18]

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0, \quad (4.6)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0. \quad (4.7)$$

Siin oleme tähistanud tuletist aja järgi täpiga ja $\dot{\phi}$ tähistab tuletist skalaarvälja ϕ järgi. Lisaks võtame edasises kasutusele uue ajaparametri $N = \ln(a(t))$, nii et (nagu eelmises peatükis)

$$dN = d\ln(a(t)) = \frac{1}{a}d(a(t)) = \frac{\dot{a}}{a}dt = Hdt \quad (4.8)$$

ja tähistame tuletise parameetri N järgi primiga:

$$()'\equiv\frac{d}{dN}=\frac{1}{H}\frac{d}{dt}. \quad (4.9)$$

Järgmisena defineerime ka kiirguse suhtelise energiatiheduse Ω_r , tolmu suhtelise energiatiheduse Ω_m ja tumeenergia suhtelise energiatiheduse Ω_{de} [18]:

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{3(1+f(\phi))H^2}, \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3(1+f(\phi))H^2}, \quad \Omega_{de} = 1 - \Omega_r - \Omega_m. \quad (4.10)$$

Defineerime veel ka efektiivse energiatiheduse ρ_{ef} ja efektiivse rõhu p_{ef} [18]:

$$\rho_{\text{ef}} = \rho_r + \rho_m + \frac{\dot{\phi}^2}{2} - 3Hf_{\phi}(\phi)\dot{\phi} + V(\phi), \quad (4.11)$$

$$p_{\text{ef}} = \frac{1}{3}\rho_r + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + 2Hf_{\phi}(\phi)\dot{\phi} + f_{\phi\phi}(\phi)\dot{\phi}^2 + f_{\phi}(\phi)\ddot{\phi} - V(\phi). \quad (4.12)$$

Nende kaudu saame leida universumi efektiivse olekuparameetri [2]

$$w_{\text{ef}} = \frac{p_{\text{ef}}}{\rho_{\text{ef}}}. \quad (4.13)$$

4.2 Vabade funktsioonidega mudeli uurimine

Leiame üleval toodud võrranditele vastava dünaamilise süsteemi ja selle kaudu uurime meie vaadeldava mudeli käitumist ajas. Esiteks kirjutame võrrandi (4.3) ehk Friedmanni võrrandi dimensioonitult kujul:

$$1 = \frac{\rho_r}{3(1+f(\phi))H^2} + \frac{\rho_m}{3(1+f(\phi))H^2} + \frac{\phi'^2}{6(1+f(\phi))} - \frac{f_{\phi}(\phi)\phi'}{1+f(\phi)} + \frac{V(\phi)}{3(1+f(\phi))H^2}. \quad (4.14)$$

Selleks, et muuta meie kosmoloogilised võrrandid autonoomseks dünaamiliseks süsteemiks, võtame kasutusele uued muutujad:

$$x = \frac{\rho_r}{3(1+f(\phi))H^2}, \quad y = \frac{\rho_m}{3(1+f(\phi))H^2}, \quad z = \frac{\dot{\phi}}{H}, \quad \phi. \quad (4.15)$$

Selliste muutujate kaudu on võimalik lihtsalt defineerida suhtelised energiatihedused [18]:

$$\Omega_r = x, \quad \Omega_m = y, \quad \Omega_{de} = 1 - x - y. \quad (4.16)$$

Need muutujad on omavahel seotud Friedmanni võrrandi kaudu, mis omandab nüüd kuju

$$1 = x + y + \frac{z^2}{6(1+f(\phi))} - \frac{f'_{\phi}(\phi)z}{1+f(\phi)} + \frac{V(\phi)}{3(1+f(\phi))H^2}. \quad (4.17)$$

Näeme, et kui potentsiaal $V(\phi) \geq 0$ ja kõveruse seose funktsioon $(1+f(\phi)) > 0$, peavad muutujad x, y, z ja ϕ rahuldama seost

$$(1+f(\phi))(1-x-y) - \frac{z^2}{6} + f'_{\phi}(\phi)z \geq 0. \quad (4.18)$$

Dünaamilise süsteemi koostamiseks leiame nüüd muutujate x, y, z ja ϕ tuletised:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\dot{\rho}_r}{3(1+f(\phi))H^2} - \frac{2\rho_r\dot{H}}{3(1+f(\phi))H^3} - \frac{3\rho_r\dot{\phi}f'_{\phi}(\phi)}{(3+3f(\phi))^2H^2} \\ \dot{y} = \frac{\dot{\rho}_m}{3(1+f(\phi))H^2} - \frac{2\rho_m\dot{H}}{3(1+f(\phi))H^3} - \frac{3\rho_m\dot{\phi}f'_{\phi}(\phi)}{(3+3f(\phi))^2H^2} \\ \dot{z} = \frac{\ddot{\phi}}{H} - \frac{\dot{H}\dot{\phi}}{H^2} \\ \dot{\phi} = Hz. \end{cases} \quad (4.19)$$

Järgmisena viime meie dünaamilise süsteemi kujule, kus muutujatena on sees ainult x, y, z, ϕ ja funktsioonid $f(\phi)$ ja $V(\phi)$ ning nende tuletised. Selleks avaldame kõigepealt energiatihedused ja nende tuletised kujul

$$\rho_r = 3x(1+f(\phi))H^2, \quad \dot{\rho}_r = -12x(1+f(\phi))H^3, \quad (4.20)$$

$$\rho_m = 3y(1+f(\phi))H^2, \quad \dot{\rho}_m = -9y(1+f(\phi))H^3. \quad (4.21)$$

Asendame need võrrandid süsteemi (4.19) ja seejärel jagame kõik süsteemi võrrandid H -ga läbi, et minna üle ' - tuletistele ja kirjutada süsteem dimensioonitult kujul:

$$\begin{cases} x' = -\frac{x}{H^2(1+f(\phi))} (H^2 f'_{\phi}(\phi)z + 4H^2(1+f(\phi)) + 2\dot{H}(1+f(\phi))) \\ y' = -\frac{y}{H^2(1+f(\phi))} (H^2 f'_{\phi}(\phi)z + 3H^2(1+f(\phi)) + 2\dot{H}(1+f(\phi))) \\ z' = \frac{\ddot{\phi}}{H^2} - \frac{\dot{H}z}{H^2} \\ \phi' = z \end{cases} \quad (4.22)$$

Friedmanni võrrandist (4.17) saame avaldada Hubble konstandi H . Kuna tegemist on H suhtes ruutvõrrandiga, saame kaks lahendit ja valime nendest positiivse, kuna meid huvitab paisuv universum. Kui asendame võrranditesse (4.20) ja (4.21) leitud H avaldise, on meil olemas

sobivad avaldised parameetrite H , ρ_r , $\dot{\rho}_r$, ρ_m ja $\dot{\rho}_m$ jaoks. Jääb üle veel avaldada \dot{H} ja $\ddot{\phi}$ sobivate muutujate kaudu. Selleks vaatame võrrandeid (4.4) ja (4.5) võrrandisüsteemina \dot{H} ja $\ddot{\phi}$ suhtes. Asendame antud võrrandites Hubble'i konstandi ja energiatihedused ning nende tuletised äsja mainitud viisil leitud avaldistega. Lahendades nüüd selle võrrandisüsteemi \dot{H} ja $\ddot{\phi}$ -i suhtes, oleme ka need parameetrid avaldanud sobivate muutujate kaudu. Asendades leitud H , \dot{H} ja $\ddot{\phi}$ -i avaldised süsteemi (4.22), olemegi kätte saanud vajalikul kujul dünaamilise süsteemi:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = E \left(xz^2(B_2 + 2C_1) + x^2(8A_1 + 6B_{12}) + xy(6A_1 + 6B_{12}) - \right. \\ \quad \left. -xz \left(6A_2B_2 + 10A_2 + \frac{3A_2^3}{A_1} \right) - x(8A_1 + 6B_{12}) \right) \\ y' = E \left(yz^2(B_2 + 2C_1) + y^2(6A_1 + 6B_{12}) + xy(8A_1 + 6B_{12}) - \right. \\ \quad \left. -yz \left(6A_2B_2 + 10A_2 + \frac{3A_2^3}{A_1} \right) - y(6A_1 - 3A_2^2 + 6B_{12}) \right) \\ z' = E \left(z^3 \left(\frac{B_2}{2} + C_1 \right) - z^2(3A_2B_2 + 3A_2C_2 + 7A_2 - B_1) + xz(4A_1 + 3B_{12}) + \right. \\ \quad + yz(3A_1 + 3B_{12}) + x(6A_1B_1 - 12A_{12}) + y(6A_1B_1 - 9A_{12}) - \\ \quad \left. -z(6A_1 - 9A_2^2 + 9B_{12}) + 12A_{12} - 6A_1B_1 \right) \\ \phi' = z, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

kus

$$A_1 = 1 + f(\phi), \quad A_2 = f_\phi(\phi), \quad A_{12} = (1 + f(\phi))f_\phi(\phi), \quad (4.24)$$

$$B_1 = (1 + f(\phi))\frac{V_\phi(\phi)}{V(\phi)}, \quad B_2 = f_\phi(\phi)\frac{V_\phi(\phi)}{V(\phi)}, \quad B_{12} = (1 + f(\phi))f_\phi(\phi)\frac{V_\phi(\phi)}{V(\phi)}, \quad (4.25)$$

$$C_1 = 1 + f_{\phi\phi}(\phi), \quad C_2 = f_{\phi\phi}(\phi), \quad E = \frac{1}{2(1 + f(\phi)) + 3f_\phi^2(\phi)}. \quad (4.26)$$

Näeme, et funktsioonidele $V(\phi)$ ja $f(\phi)$ peavad kehtima täiendavad tingimused $V(\phi) \neq 0$, $1 + f(\phi) \neq 0$ ja $2(1 + f(\phi)) + 3f_\phi^2(\phi) \neq 0$, sest vastasel korral lähevad võrrandid singulaarseks.

Järgnevalt analüüsime leitud dünaamilise süsteemi (4.23) käitumist, leides selle süsteemi püsipunktid ja uurides püsipunktide stabiilsust. Püsipunktide stabiilsuse uurimiseks leiame süsteemi Jacobi maatriksi ja selle omaväärtused püsipunktides.

Meie süsteemi püsipunktis kehtib tingimus $x' = y' = z' = \phi' = 0$. Kuna püsipunktis $\phi' = 0$, siis

järelikult ka $z = 0$ ja meie võrrandid lihtsustuvad oluliselt:

$$\begin{cases} x' = E((x^{*2}(8A_1 + 6B_{12}) + x^*y^*(6A_1 + 6B_{12}) - x^*(8A_1 - 6B_{12}))) = 0 \\ y' = E(y^{*2}(6A_1 + 6B_{12}) + x^*y^*(8A_1 + 6B_{12}) - y^*(6A_1 - 3A_2^2 + 6B_{12})) = 0 \\ z' = E(x^*(6A_1B_1 - 12A_{12}) + y^*(6A_1B_1 - 9A_{12}) + 12A_{12} - 6A_1B_1) = 0 \\ \phi' = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel selgub, et ilma lisatingimusteta püsipunkte on süsteemil ainult üks:

$$x_r = 1, \quad y_r = 0, \quad z_r = 0, \quad \phi_r = \textit{konstant}. \quad (4.28)$$

See püsipunkt vastab kiirguse-domineeritud universumi ajajärgule, sest kiirguse suhteline energiatihedus on seal $\Omega_r = x = 1$ ning tolmu ja tumeenergia suhtelised energiatihedused võrduvad nulliga.

Järgmiste püsipunktide leidmiseks lähtume sellest, milliseid ajajärke peaks universum veel läbima. Otsime kõigepealt tolmu-domineeritud ajajärgule vastavat püsipunkti. Suhtelised energiatihedused selles püsipunktis peaksid olema ilmselt $\Omega_r = 0$, $\Omega_m = 1$ ja $\Omega_{de} = 0$, seega muutujad peaksid omama väärtuseid $x_m = 0$, $y_m = 1$, $z_m = 0$ ja $\phi_m = \textit{konstant}$. Asetame need väärtused võrrandisüsteemi (4.27) ja leiame vajalikud lisatingimused, et tegemist oleks tõesti püsipunktiga:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 3A_2^2E = 0 \\ z' = 3A_{12}E = 0 \\ \phi' = 0. \end{cases} \quad (4.29)$$

Näeme, et antud püsipunkti leidumiseks peab kehtima $A_2^2E = A_{12}E = 0$. Kui E oleks võrdne nulliga, oleks süsteem alati võrdne nulliga, seega $E \neq 0$. Järelikult peab kehtima $A_2^2 = A_{12} = 0$ ehk $f_{\phi}^2(\phi_m) = (1 + f(\phi_m))f_{\phi}(\phi_m) = 0$. Kuna ka $(1 + f(\phi_m)) \neq 0$, oleme püsipunktiks saanud

$$x_m = 0, \quad y_m = 1, \quad z_m = 0, \quad \phi_m = \textit{konstant}, \quad (4.30)$$

$$f_{\phi}(\phi_m) = 0. \quad (4.31)$$

Ülejäänud püsipunktid peavad vastama inflatsioonile ja vaakumi-domineeritud ajastule. Nende mõlema korral on suhteliste energiatiheduste väärtused ilmselt $\Omega_r = 0$, $\Omega_m = 0$, $\Omega_{de} = 1$ ja muutujate väärtused on seega $x_{de} = 0$, $y_{de} = 0$, $z_{de} = 0$ ja $\phi_{de} = \textit{konstant}$. Asetame need

väärtused võrrandisüsteemi (4.27) ja leiame vajalikud lisatingimused, et tegemist oleks tõesti püsipunktidega:

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = E(12A_{12} - 6A_1B_1) = 0 \\ \phi' = 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Kuna $E \neq 0$, siis näeme siit, et püsipunkt eksisteerib, kui $12A_{12} - 6A_1B_1 = 0$ ehk kui

$$2(1 + f(\phi_{de}))f_\phi(\phi_{de}) - (1 + f(\phi_{de}))^2 \frac{V_\phi(\phi_{de})}{V(\phi_{de})} = 0. \quad (4.33)$$

Kuna ka $1 + f(\phi_{de}) \neq 0$, siis järelikult

$$2f_\phi(\phi_{de}) - (1 + f(\phi_{de})) \frac{V_\phi(\phi_{de})}{V(\phi_{de})} = 0. \quad (4.34)$$

Seega oleme saanud, et inflatsioonile või vaakumi-domineeritud ajastule vastav püsipunkt on antud tingimusega

$$x_{de} = 0 \quad y_{de} = 0 \quad z_{de} = 0 \quad \phi_{de} = \text{konstant}, \quad (4.35)$$

$$2f_\phi(\phi_{de}) - (1 + f(\phi_{de})) \frac{V_\phi(\phi_{de})}{V(\phi_{de})} = 0. \quad (4.36)$$

Leitud püsipunkt võib käituda inflatsioonile vastava püsipunktina või vaakumi-domineeritud ajastule vastava püsipunktina vastavalt sellele, millised on funktsioonid $V(\phi)$ ja $f(\phi)$.

Järgmisena uurime püsipunktide stabiilsust. Selleks arvutame meie dünaamilise süsteemi (4.23) Jacobi maatriksi ja leiame selle omaväärtused püsipunktides. Üldine valem meie süsteemi Jacobi maatriksi leidmiseks on kujul

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'(x,y,z,\phi)}{\partial x} & \frac{\partial x'(x,y,z,\phi)}{\partial y} & \frac{\partial x'(x,y,z,\phi)}{\partial z} & \frac{\partial x'(x,y,z,\phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y'(x,y,z,\phi)}{\partial x} & \frac{\partial y'(x,y,z,\phi)}{\partial y} & \frac{\partial y'(x,y,z,\phi)}{\partial z} & \frac{\partial y'(x,y,z,\phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z'(x,y,z,\phi)}{\partial x} & \frac{\partial z'(x,y,z,\phi)}{\partial y} & \frac{\partial z'(x,y,z,\phi)}{\partial z} & \frac{\partial z'(x,y,z,\phi)}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \phi'(x,y,z,\phi)}{\partial x} & \frac{\partial \phi'(x,y,z,\phi)}{\partial y} & \frac{\partial \phi'(x,y,z,\phi)}{\partial z} & \frac{\partial \phi'(x,y,z,\phi)}{\partial \phi} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Väljaarvutatud tuletistega Jacobi maatriksi avaldis tuleb väga suur ja ruumi säästmise huvides jätame selle siinkohal välja kirjutamata.

Jacobi maatriksi omaväärtused kiirguse-domineeritud püsipunktis on

$$\lambda_{r1} = -1, \quad \lambda_{r2} = 0, \quad \lambda_{r3} = 1, \quad \lambda_{r4} = 4. \quad (4.38)$$

Üks omaväärtus tuli küll null, aga kuna ülejäänud omaväärtustest kaks on positiivsed ja üks on negatiivne, on selge, et tegemist on sadulaga. See on sobiv tulemus, kuna me tahame, et meie universumi mudel liiguks inflatsioonist kiirguse-domineeritud ajajärku ja väljuks kiirguse-domineeritud ajajärgust tolmu-domineeritud ajastu suunas.

Tolmu-domineeritud püsipunkti omaväärtuste leidmisel kasutame lihtsustavat tingimust (4.31) ja saame, et omaväärtused on

$$\lambda_{m1} = -1, \quad \lambda_{m2} = 3, \quad \lambda_{m3}, \lambda_{m4} = -\frac{3}{4} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{3} f'_{\phi\phi}(\phi_m)} \right). \quad (4.39)$$

Näeme, et taas on tegemist sadulaga, mis on samuti sobiv tulemus, kuna me tahame, et universum väljuks tolmu-domineeritud ajastust vaakumi-domineeritud ajastu poole.

Inflatsioonile või vaakumi-domineeritud ajastule vastava püsipunkti omaväärtused on

$$\lambda_{de1} = -4, \quad \lambda_{de2} = -3, \quad (4.40)$$

$$\lambda_{de3}, \lambda_{de4} = -\frac{3}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{16(1+f)f'_{\phi\phi}V + 16f'^2_{\phi}V - 8(1+f)^2V'_{\phi\phi}}{(6(1+f) + 9f'^2_{\phi})V}} \right)_{\phi=\phi_{de}}. \quad (4.41)$$

Kõik omaväärtused on negatiivsed ja tegemist on atraktoriga, kui

$$\left[\frac{16(1+f)f'_{\phi\phi}V + 16f'^2_{\phi}V - 8(1+f)^2V'_{\phi\phi}}{(6(1+f) + 9f'^2_{\phi})V} \right]_{\phi=\phi_{de}} < 0. \quad (4.42)$$

Üks omaväärtus on positiivne ja tegemist on sadulaga, kui

$$\left[\frac{16(1+f)f'_{\phi\phi}V + 16f'^2_{\phi}V - 8(1+f)^2V'_{\phi\phi}}{(6(1+f) + 9f'^2_{\phi})V} \right]_{\phi=\phi_{de}} > 0. \quad (4.43)$$

Püsipunkt on mittehüperboolne, kui

$$\left[\frac{16(1+f)f'_{\phi\phi}V + 16f'^2_{\phi}V - 8(1+f)^2V'_{\phi\phi}}{(6(1+f) + 9f'^2_{\phi})V} \right]_{\phi=\phi_{de}} = 0. \quad (4.44)$$

Seega antud püsipunkti korral sõltub püsipunkti stabiilsus funktsioonide $V(\phi)$ ja $f(\phi)$ valikust.

4.3 Fikseeritud funktsioonidega mudeli uurimine

Järgnevalt valime funktsioonidele $V(\phi)$ ja $f(\phi)$ kindla kuju ehk fikseerime meie mudeli ja uurime selle käitumist. Kõik eelnevalt toodud tingimused funktsioonidele $V(\phi)$ ja $f(\phi)$ on rahuldatud, kui valida funktsioonideks

$$f(\phi) = \phi^2, \quad V(\phi) = \phi^4 + 1. \quad (4.45)$$

Antud mudel on sama funktsionaalse kujuga nagu Higgsi inflatsiooni mudel skalaarvälja suurte väärtuste juures [19]. Sellise valiku tulemusena omandab meie dünaamiline süsteem kuju

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x}{7\phi^8 + 8\phi^6 + 8\phi^4 + 8\phi^2 + 1} \left(28\phi^8 x + 27\phi^8 y - 28\phi^8 - 70\phi^7 z + 56\phi^6 x + 54\phi^6 y + \right. \\ \quad \left. + 7\phi^6 z^2 - 56\phi^6 - 58\phi^5 z + 32\phi^4 x + 30\phi^4 y + 7\phi^4 z^2 - 32\phi^4 - 22\phi^3 z + 8\phi^2 x + \right. \\ \quad \left. + 6\phi^2 y + 3\phi^2 z^2 - 8\phi^2 - 10\phi z + 4x + 3y + 3z^2 - 4 \right) \\ y' = \frac{y}{7\phi^8 + 8\phi^6 + 8\phi^4 + 8\phi^2 + 1} \left(28\phi^8 x + 27\phi^8 y - 21\phi^8 - 70\phi^7 z + 56\phi^6 x + 54\phi^6 y + \right. \\ \quad \left. + 7\phi^6 z^2 - 48\phi^6 - 58\phi^5 z + 32\phi^4 x + 30\phi^4 y + 7\phi^4 z^2 - 24\phi^4 - 22\phi^3 z + 8\phi^2 x + \right. \\ \quad \left. + 6\phi^2 y + 3\phi^2 z^2 - 10\phi z + 4x + 3y + 3z^2 - 3 \right) \\ z' = \frac{1}{2(7\phi^6 + \phi^4 + 7\phi^2 + 1)} \left(6\phi^7 y + 28\phi^6 xz + 27\phi^6 yz - 42\phi^6 z + 24\phi^5 x + 30\phi^5 y - \right. \\ \quad \left. - 70\phi^5 z^2 - 24\phi^5 + 28\phi^4 xz + 27\phi^4 yz + 7\phi^4 z^3 - 78\phi^4 z + 6\phi^3 y + 4\phi^3 z^2 + 4\phi^2 xz + \right. \\ \quad \left. + 3\phi^2 yz + 30\phi^2 z - 24\phi x - 18\phi y - 26\phi z^2 + 24\phi + 4xz + 3yz + 3z^3 - 6z \right) \\ \phi' = z. \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Järgnevalt uurime antud dünaamilise süsteemi püsipunkte. Püsipunktide juurde kuuluvatest tingimustest leiame ϕ väärtused ja seejärel, kasutades leitud ϕ väärtusi, arvutame püsipunktide omaväärtused ja hindame nende põhjal süsteemi käitumist.

Kiirguse-domineeritud püsipunktis $(1, 0, 0, \phi_r)$ olid omaväärtused $-1, 0, 1, 4$ ja lisatingimusi polnud, nii et seda punkti pole rohkem uurida vaja. Uurime seega tolmu-domineeritud püsipunkti $(0, 1, 0, \phi_m)$. Seal oli tingimuseks, et $f_\phi(\phi_m) = 0$, mis tähendab, et $2\phi_m = 0$ ehk

$\phi_m = 0$ ja püsipunkti koordinaadid on $(0, 1, 0, 0)$. Antud püsipunkti omaväärtused on seega

$$\lambda_{m1} = -1, \quad \lambda_{m2} = 3, \quad \lambda_{m3} = -\frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{57}\right), \quad \lambda_{m4} = -\frac{3}{4} \left(1 - \sqrt{57}\right). \quad (4.47)$$

Näeme, et kaks omaväärtust on negatiivsed ja kaks on positiivsed. Järelikult on püsipunkti $(0, 1, 0, 0)$ näol tegemist sadulaga, millel on kaks tõmbavat suunda ja kaks tõukavat suunda. Jäänud on veel uurida inflatsioonile või vaakumi-domineeritud ajastule vastavat püsipunkti $(0, 0, 0, \phi_{de})$. Fikseeritud funktsioonidega omandab selle püsipunkti tingimus (4.36) kuju

$$-4\phi_{de}^3 (\phi_{de}^2 + 1) + 4\phi_{de} (\phi_{de}^4 + 1) = 0. \quad (4.48)$$

Selle võrrandi lahendamisel ϕ_{de} suhtes on tulemuseks $\phi_{de1} = -1$, $\phi_{de2} = 0$ ja $\phi_{de3} = 1$. Omaväärtuste arvutamiseks leiame kõigepealt antud püsipunkti omaväärtuste avaldised fikseeritud funktsioonidega:

$$\lambda_{de1} = -4, \quad \lambda_{de2} = -3, \quad \lambda_{de3}, \lambda_{de4} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16(1 - 5\phi_{de}^4)}{3(7\phi_{de}^6 + \phi_{de}^4 + 7\phi_{de}^2 + 1)}}. \quad (4.49)$$

Võttes avaldises (4.49), et $\phi_{de} = -1$, saame, et

$$\lambda_{de1} = -4, \quad \lambda_{de2} = -3, \quad \lambda_{de3} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad \lambda_{de4} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}. \quad (4.50)$$

Võttes avaldises (4.49), et $\phi_{de} = 0$, saame, et

$$\lambda_{de1} = -4, \quad \lambda_{de2} = -3, \quad \lambda_{de3} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{57}}{2}, \quad \lambda_{de4} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{57}}{2}. \quad (4.51)$$

Võttes avaldises (4.49), et $\phi_{de} = 1$, saame, et

$$\lambda_{de1} = -4, \quad \lambda_{de2} = -3, \quad \lambda_{de3} = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, \quad \lambda_{de4} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}. \quad (4.52)$$

Püsipunktis $(0, 0, 0, -1)$ on kõik omaväärtused negatiivsed ja tegemist on täieliku atraktoriga. Püsipunktis $(0, 0, 0, 0)$ on kolm omaväärtust negatiivsed ja üks on positiivne, tegemist on sadulaga, millel on üks tõukav suund. Püsipunktis $(0, 0, 0, 1)$ on kõik omaväärtused negatiivsed, tegemist on täieliku atraktoriga. Dünaamilisel süsteemil (4.46) on seega viis püsipunkti, aga ilmselt ei saa süsteem areneda täielikust atraktorist täielikku atraktorisse, järelikult peaks süsteemi trajektoor faasiruumis läbima nelja püsipunkti:

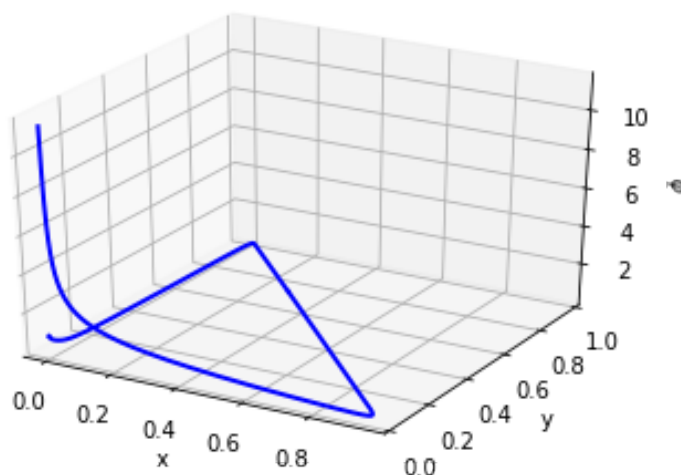
- $(0, 0, 0, 0)$ - sadul, inflatsioonile vastav püsipunkt;
- $(1, 0, 0, \phi_r)$ - sadul, kiirguse-domineeritud ajastule vastav püsipunkt;

- $(0, 1, 0, 0)$ - sadul, tolmu-domineeritud ajastule vastav püsipunkt;
- $(0, 0, 0, 1)$ või $(0, 0, 0, -1)$ - täielik atraktor, vaakumi-domineeritud ajastule vastav püsipunkt.

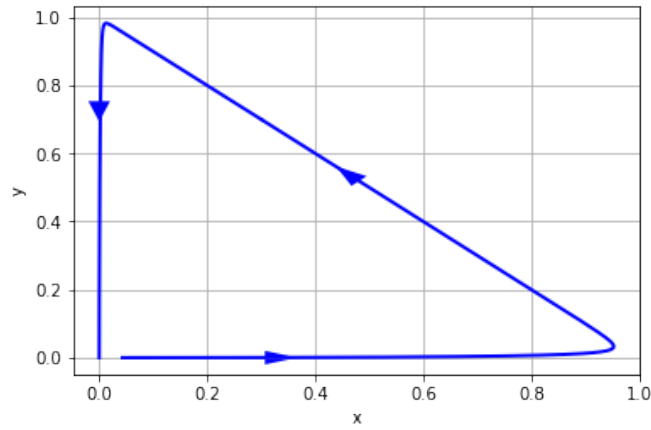
Näeme, et kõik vajalikud püsipunktid on meie mudeli dünaamilisel süsteemil olemas.

Dünaamilisi süsteeme on hea uurida faasiportree abil, aga kuna antud juhul on tegemist neljamõõtmelise süsteemiga, siis arvutiekraanil on küll võimalik uurida faasiportree läbilõikeid kolmemõõtmelises ruumis, aga trükitud kujul oleksid sellised joonised väheinformatiivsed. Seega joonistame näitena ühe konkreetse trajektoori. Esitame selle nii kolmemõõtmelises ruumis (x, y, ϕ) -teljestikus kui ka kahemõõtmelises ruumis (x, y) -teljestikus. Algpunktiks valime x -i ja y -i väärtused selliselt, et trajektoor käituks faasiruumis sarnaselt Λ CDM-mudeliga (vt. eelmine peatükk). Osutub, et sobivad väärtused on $x_0 = 0.30000001$ ja $y_0 = 0.69999999$. Lisaks valime algpunktis z -i ja ϕ selliselt, et gravitatsioonikonstandi ajaline varieeruvus oleks väike, nii nagu ütleavad vaatlused [20]. Seega valime, et $z_0 = 0$ ja $\phi_0 = 0,0002$.

Esitame nüüd valitud trajektoori projektsiooni kolmemõõtmelises ruumis. Tulemuseks on trajektoor, mis algab $\phi \rightarrow \infty$ juurest, seejärel liigub lähedalt mööda inflatsioonile, kiirguse-domineerimisele ja tolmu-domineerimisele vastavate püsipunktide juurest ning suubub vaakumi-domineeritud ajastule vastavasse püsipunkti:



Joonis 4.1: Dünaamilise süsteemi (4.46) trajektoor faasiruumis.



Joonis 4.2: Süsteemi trajektoori projektsioon (x,y) -tasandile.

Järgmisena esitame suhteliste energiatiheduste ja efektiivse olekuparametri graafikud. Nende graafikute uurimisel peame meeles pidama, et me kasutame oma süsteemis tavalise kosmoloogilise aja t asemel uut ajaparametrit $N = \ln(a(t))$. Kuna $dN = Hdt$, siis saaksime tavalisele ajale üle minna kujul $dt = dN/H$.

Esitame suhteliste energiatiheduste sõltuvuse ajaparametrist N :

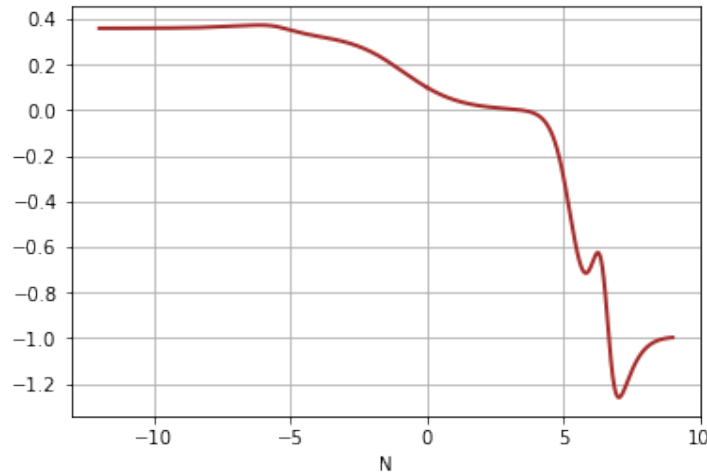


Joonis 4.3: Suhteliste energiatiheduste sõltuvus ajaparametrist N .

Uurime veel ka efektiivset olekuparametrit $w_{\text{ef}} = p_{\text{ef}}/\rho_{\text{ef}}$. Fikseeritud funktsioonidega saame selle avaldiseks

$$w_{\text{ef}} = \frac{1}{3(7\phi^6 + \phi^4 + 7\phi^2 + 1)} \left(28\phi^6 x + 27\phi^6 y - 21\phi^6 - 56\phi^5 z + 28\phi^4 x + 27\phi^4 y + 7\phi^4 z^2 - 27\phi^4 + 4\phi^2 x + 3\phi^2 y + 3\phi^2 - 8\phi z + 4x + 3y + 3z^2 - 3 \right). \quad (4.53)$$

Esitame efektiivse olekuparameetri graafiku:



Joonis 4.4: Efektiivse olekuparameetri sõltuvus ajaparameetrist N .

4.4 Arutelu

Graafikutelt ilmneb, et meie mudelis on tõepoolest esindatud kõik neli kosmoloogilist ajastut: skalaarvälja-domineeritud ajastu, kiirguse-domineeritud ajastu, tolmu-domineeritud ajastu ja uuesti skalaarvälja-domineeritud ajastu. Süsteemi trajektoori graafikult näeme, et trajektoor möödub faasiruumis skalaarvälja-domineeritud ajastule, kiirguse-domineeritud ajastule ja tolmu-domineeritud ajastule vastavate püsipunktide lähedalt ja suundub lõpuks vaakumi-domineeritud püsipunkti. See püsipunkt on täielik atraktor ja süsteemi trajektoor jääb sellesse püsipunkti, sõltumata sellest, kui kaugele ajas süsteemi integreerida. Lisaks näeme, et trajektoori projektsioon (x, y) -tasandile on analoogne Λ CDM-mudelile vastava dünaamilise süsteemi trajektooriga.

Ka suhteliste energiatiheduste graafikult on selgelt näha, et käesoleva mudeliga kirjeldatav universum algab skalaarvälja-domineeritud ajastuga ehk inflatsiooniga, seejärel läbib kiirguse-domineeritud ja tolmu-domineeritud ajastud ning lõpetab oma arengu vaakumi-domineeritud ajastuga. Seega energiatiheduste mõttes on käesoleval mudelil olemas peamised omadused, mis peavad olema heal kosmoloogilisel mudelil.

Olekuparameetri graafikult on näha, et meie süsteemi olekuparameetriks kiirguse-domineeritud ajastul on $w_{\text{ef}} \approx 1/3$ ja tolmu-domineeritud ajastul $w_{\text{ef}} \approx 0$, mis on ootuspärane. Samas inflatsioonile vastaval ajal $w_{\text{ef}} \approx 1/3$, mis peaks olema nii ainult kiirguse-domineeritud ajastul. Me ootaksime, et universumi alguses, inflatsiooni ajal oleks sarnaselt vaakumi-domineeritud ajastule $w \approx -1$, sest ka inflatsiooni ajal peaks domineerima vaakumi energia. Meie mudelis

see nii ei ole ja seetõttu varases universumis kiirenevat paisumist ei ilmne. Nõnda ei saa antud mudelit lugeda täielikult rahuldavaks universumi kirjelduseks. Liikudes tolmu-domineeritud ajastust vaakumi-domineeritud ajastusse toimuvad efektiivse olekuparameetri väärtuses võnked ja mõnda aega kehtib isegi $w_{\text{ef}} < -1$. See on tähelepanuväärne käitumine, mida on täheldatud ka varem teiste mudelite uurimisel [21] ja oleks huvitav mõelda, millised vaatluslikud efektid sellega võiksid kaasneda. Lõpuks suubub efektiivne olekuparameeter väärtusele -1 , mis on vaakumi-domineeritud ajastu korral eeldatav.

Lõpuks tasub mainida, et süsteemi trajektoorid võivad olla väga tundlikud algpunkti valiku suhtes. Antud juhul on algpunktiks valitud $x_0 = 0.30000001$, $y_0 = 0.69999999$, $z_0 = 0$ ja $\phi_0 = 0,0002$ ning süsteemi on integreeritud ajas edasi ja tagasi. Sellise punkti korral oli tulemuseks kõikide kosmoloogiliste ajastuste selge esinemine. Näiteks juhul, kui valida algpunktiks praegune ajahetk ehk määrata muutujate x ja y algväärtusteks kiirguse ja tolmu suhteliste energiatiheduste praegused vaatluslikud väärtused (nagu eelmises peatükis), siis tulemuseks oli universum, mis algas skalaarvälja-domineeritud ajastust, seejärel liikus osaliselt tolmu-domineeritud ajajärku ning sellest vaakumi-domineeritud ajastusse, vahepealne kiirguse-domineeritud faas jäi nõrgaks. Samas aga ilmnes omadus, mida näeme ka trajektoori graafikult, et suvalise algpunkti valiku korral möödub süsteemi trajektoor ikkagi praegusele universumile vastava punkti ($x \approx 0$, $y \approx 0,3$) lähedalt, teisisõnu, erinevate algtingimuste korral on üldine kvalitatiivne käitumine lahenditel sama, aga erinevate faaside läbimise kestvus ja intensiivsus on erinevad.

Kosmoloogiliste mudelite uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega

Sulev Tõkke

Kokkuvõte

Käesoleva bakalaureusetöö teoreetilises osas andsime ülevaate kaasaegsest kosmoloogiast ja peamistest sellega seotud probleemidest ning tegime sissejuhatuse skalaar-tensorteooriatesse. Lisaks tõime ära kõige olulisemad dünaamiliste süsteemide teooriaga seotud mõisted ja kirjeldasime peamist dünaamiliste süsteemide uurimise meetodit, lineaarse stabiilsuse teooriat.

Töö arvutuslikus osas uurisime kõigepealt dünaamiliste süsteemide meetoditega standardse Λ CDM-mudeli omadusi. Selleks koostasime Λ CDM-mudeli kosmoloogiliste võrrandite põhjal kahemõõtmelise dünaamilise süsteemi ning leidsime selle süsteemi püsipunktid ja süsteemi Jacobi maatriksi omaväärtused püsipunktides. Seejärel esitasime süsteemi faasiportree ja trajektoori ning suhteliste energiatiheduste ja efektiivse olekuparameetri graafikud ja analüüsisime neid.

Käesoleva töö kõige tähtsamas osas koostasime kosmoloogilise mudeli skalaar-tensorteooriate põhjal ja uurisime selle omadusi dünaamiliste süsteemide meetoditega. Selleks vaatasime skalaar-tensorteooriat Jordani raamis ja kirjutasime välja sellele vastavad kosmoloogilised võrrandid, mis sisaldasid kahte vabaks jäänud funktsiooni. Seejärel koostasime antud võrrandite põhjal neljamõõtmelise dünaamilise süsteemi ja füüsikalistest kaalutlustest lähtudes leidsime selle püsipunktid ja arvutasime süsteemi Jacobi maatriksi omaväärtused püsipunktides. Nende arvutuste käigus leidsime ka tingimused, mida vabaks jäänud funktsioonid pidid rahuldama. Antud tingimusi arvestades fikseerisime esialgu vabaks jäänud funktsioonid ja arvutasime fikseeritud funktsioonidega dünaamilise süsteemi püsipunktide täpsed koordinaadid ja leidsime süsteemi Jacobi maatriksi omaväärtuste arvulised väärtused püsipunktides. Seejärel esitasime süsteemi trajektoori projektsiooni nii kolme- kui ka kahemõõtmelises ruumis ja koostasime suhteliste energiatiheduste ja efektiivse olekuparameetri graafikud ning arutlesime nende põhjal süsteemi omaduste üle.

Analüüsi tulemusena nägime, et püsipunktid kirjeldasid universumi arenguetappe kvalitatiivselt õigesti. Siiski ei ole antud mudel täielikult rahuldav universumi kirjeldus – alguses tekib küll skalaarvälja-domineeritud ajastu, aga mitte kiirenevat paisumist.

Tänuavaldused

Olen väga tänulik oma juhendajale Laur Järvele, kellega oli suurepärase koostööd teha ja kes andis mulle juba bakalaureusetasemel võimaluse tegeleda tõsise teoreetilise füüsika teadustööga. Laur Järv motiveeris mind alati andma endast parimat ja tekitas soovi pidevalt õppida ja edasi areneda.

Sulev Tõkke

Kirjandus

- [1] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla ja C. Skordis. Modified Gravity and Cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1–189, 2012.
- [2] S. Bahamonde, C. G. Böhrer, S. Carloni, E. J. Copeland, W. Fang ja N. Tamanini. *Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity*. arXiv:1712.03107, 2017.
- [3] A. A. Coley. *Dynamical Systems and Cosmology*. Springer Science+Business Media, 2003.
- [4] S. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Pearson, 2004.
- [5] C. G. Böhrer ja N. Chan. *Dynamical systems in cosmology*. arXiv:1409.5585, 2014.
- [6] P. A. R Ade ja teised. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016.
- [7] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [8] J. Garriga ja A. Vilenkin. Solutions to the cosmological constant problems. *Phys. Rev.*, D64:023517, 2001.
- [9] V. Faraoni. *Cosmology in scalar tensor gravity*. Springer, 2004.
- [10] L. Järv, P. Kuusk ja M. Saal. Potential dominated scalar-tensor cosmologies in the general relativity limit: phase space view. *Phys. Rev.*, D81:104007, 2010.
- [11] C. Brans ja R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961. [,142(1961)].
- [12] E. E. Flanagan. The Conformal frame freedom in theories of gravitation. *Class. Quant. Grav.*, 21:3817, 2004.
- [13] C. W. Misner, K. S. Thorne ja J. A. Wheeler. *Gravitation*. Springer, 2005.

- [14] L. Järv, P. Kuusk, M. Saal ja O. Vilson. Invariant quantities in the scalar-tensor theories of gravitation. *Phys. Rev.*, D91(2):024041, 2015.
- [15] D. K. Arrowsmith ja C. M. Place. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1994.
- [16] J. Jost. *Dynamical Systems. Examples of Complex Behaviour*. Springer, 2005.
- [17] G. C. Layek. *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2015.
- [18] S. Capozziello, S. Nesseris ja L. Perivolaropoulos. Reconstruction of the Scalar-Tensor Lagrangian from a LCDM Background and Noether Symmetry. *JCAP*, 0712:009, 2007.
- [19] F. L. Bezrukov ja M. Shaposhnikov. The Standard Model Higgs boson as the inflaton. *Phys. Lett.*, B659:703–706, 2008.
- [20] J. P. Uzan. Varying Constants, Gravitation and Cosmology. *Living Rev. Rel.*, 14:2, 2011.
- [21] L. Järv, P. Kuusk ja M. Saal. Scalar-tensor cosmologies with a potential in the general relativity limit: time evolution. *Phys. Lett.*, B694:1–5, 2011.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Sulev Tõkke,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Kosmoloogiliste mudelite uurimine dünaamiliste süsteemide meetoditega,

mille juhendaja on Laur Järv,

- (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
 3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 31. mai 2018. a.